Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2015 S-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Onsdag den 17. juni 2015

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 - (6+a)z^2 + (5+6a)z - 5a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - (6+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (5+6a)\frac{dx}{dt} - 5ax = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 9\frac{d^2x}{dt^2} + 23\frac{dx}{dt} - 15x = e^{2t}.$$

(1) Vis, at $z = a$ er en rod i polynomiet P_a. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P_a, og angiv røddernes multipliciteter.

Løsning. Ved indsættelse ses, at $P_a(a) = 0$, så $z = a$ er en rod. Ved polynomiers division opnår vi, at faktoriseringen

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = (z-a)(z^2 - 6z + 5)$$

er opfyldt. Heraf får vi nu, at samtlige rødder i P_a er $a, 5$ og 1. Hvis $a \notin \{1, 5\}$, er rødderne forskellige og har multiplicitet 1. Hvis $a = 5$, har $z = 5$ multiplicieten 2, og $z = 1$ har multipliciteten 1. Hvis $a = 1$, har $z = 1$ multipliciteten 2, og $z = 5$ har multipliciteten 1.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Hvis $a \notin \{1, 5\}$ er den fuldstændige løsning givet ved

$$x = c_1 e^{at} + c_2 e^{5t} + c_3 e^t, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Hvis $a = 1$, får vi, at

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} + c_3 t e^t, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Hvis $a = 5$, får vi, at

$$x = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t} + c_3 e^{-t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi ser, at $a = 3$. Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = Ae^{2t}$, og ved indsættelse får vi, at $A = \frac{1}{3}$. Den fuldstændige løsning er derfor

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} + c_3 e^t + \frac{1}{3} e^{2t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(4) En homogen, lineær differentialligning $(***)$ har det tilhørende karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ med forskriften

$$\forall z \in \mathbf{C} : Q(z) = (z^2 + 1)P_7.$$

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Løsning. Rødderne i polynomiet $Q = Q(z)$ er $7, 1, 5, i$ og $-i$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$ er derfor

$$x = c_1 e^{7t} + c_2 e^{5t} + c_3 e^t + c_4 \cos t + c_5 \sin t, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1], & \text{for } x < 0 \\ [-2, 2], & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ [-3, 3], & \text{for } x \geq 1 \end{cases},$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 x.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

Løsning. Da grafen for F er en afsluttet delmængde af $\mathbf{R}^2$, har F afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Vi betragter følgen (x_k), hvor $x_k = -\frac{1}{k}$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, og vi ser, at $(x_k) \to 0$. For enhver konvergent følge y_k, hvor $y_k \in F(x_k)$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, gælder det, at grænseværdien ikke kan være $2 \in F(0)$. Dette viser, at F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

Løsning. Da F har afsluttet graf egenskaben, og da $F(x) \subset [-4, 4]$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$, er F opad hemikontinuert, thi $[-4, 4]$ er kompakt.

(4) Bestem mængden af alle fikspunkter for korrespondancen F. [Et fikspunkt for F er et punkt, så $x \in F(x)$.]

Løsning. Ethvert punkt i mængden $[0, 3]$ er et fikspunkt for korrespondancen F.

(5) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, idet udsagnet

$$\forall x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}$$

er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$V(x) = \begin{cases} x^2, & \text{for } x < 0, \text{ hvor } y = 0 \\ 0, & \text{for } x = 0, \text{ hvor } y \in [-2, 2] \\ x^2 + 4x, & \text{for } 0 < x < 1, \text{ hvor } y = \pm 2 \\ x^2 + 9x, & \text{for } x \geq 1, \text{ hvor } y = \pm 3 \end{cases}.$$

(6) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x, y)\}.$$

Løsning. På grundlag af resultatet i spørgsmålet ovenfor ser vi, at

$$M(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } x < 0 \\ [-2,2], & \text{for } x = 0 \\ \{-2,2\}, & \text{for } 0 < x < 1 \\ \{-3,3\}, & \text{for } x \geq 1 \end{cases}.$$

Opgave 3. For ethvert $r \geq 1$ betragter vi mængden

$$K(r) = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \frac{5}{r} \leq |z| \leq 5 + \frac{1}{r} \Big\}.$$

(1) Godtgør, at mængden $K(r)$ er kompakt for et vilkårligt $r \geq 1$.

Løsning. For ethvert $r \geq 1$ er mængden $K(r)$ afsluttet og begrænset og dermed kompakt.

(2) Bestem fællesmængden

$$K_0 = \bigcap_{r \geq 1} K(r).$$

Er K_0 kompakt?

Løsning. Man finder, at

$$K_0 = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 5 \},$$

og vi ser, at K_0 er kompakt.

(3) Bestem foreningsmængden

$$K_\infty = \bigcup_{r \geq 1} K(r).$$

Er K_∞ kompakt?

Løsning. Her finder man, at

$$K_\infty = \{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leq 6 \},$$

og da denne mængde ikke er afsluttet, er den ikke kompakt.

(4) Bestem det ydre for mængden K_∞.

Løsning. Det ydre for mængden K_∞ er mængden

$$Y = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 6\}.$$

(5) Lad (z_k) være en følge, som opfylder betingelsen

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : z_k \in K(k).$$

Vis, at følgen (z_k) har en konvergent delfølge (z_{k_p}) med et grænsepunkt z_0. Hvad er $|z_0|$?

Løsning. Det er klart, at $z_k \in K_\infty$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, og da K_∞ er en begrænset mængde, har følgen (z_k) en konvergent delfølge (z_{k_p}). Grænsepunktet z_0 for denne delfølge må tilhøre mængden

$$K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 5\},$$

der er kompakt. Altså har man, at $|z_0| \leq 5$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(4x + \dot{x} + \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left[4x + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 4x + y + y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at $\frac{\partial F}{\partial x} = 4$ og $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2y$. Funktionen F har derfor Hessematricen

$$F'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at F'' er positiv semidefinit overalt på $\mathbf{R}^2$, og da er F åbenbart en konveks funktion.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = 2015$ er opfyldt.

Løsning. Det er klart, at det givne variationsproblem er et minimumsproblem. Vi ser straks, at Euler-Lagranges differentialligning er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = 2.$$

Nu finder vi, at $\dot{x} = 2t + A$ og $x = t^2 + At + B$, hvor $A, B \in \mathbf{R}$.

Idet $x(0) = 0$, er $B = 0$, og idet $x(1) = 2015$, er $A = 2014$.

Den søgte løsning er derfor

$$x^* = x^*(t) = t^2 + 2014t.$$